# CORRIGÉ

**Problème 1 : Vrai-Faux**

1. **Vrai**. On va montrer la contraposée de l'implication. Supposons que $n$ soit impair, alors $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$ et donc $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Or $2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$ donc $n^2$ est impair. Ainsi, par contre-apposition, si $n^2$ est pair alors $n$ est pair.
2. **Faux**. Considérons la suite $u_n := 1 - \frac{1}{n+1}$. Alors pour tout $n$, $n+1 < n+2$ donc $-\frac{1}{n+1} < -\frac{1}{n+2}$ et donc $u_n < u_{n+1}$. Ainsi $(u_n)$ est strictement croissante. Pour autant,
$$\lim_{n\to\infty} u_n = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1.$$
Ainsi $(u_n)$ est une suite strictement croissante qui ne tend pas vers $+\infty$.
3. **Vrai**. Montrons par récurrence à deux pas que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n - 2$.

   Pour $n = 0$, on a $3^0 - 2 = 1 - 2 = -1 = u_0$ et pour $n = 1$, $3^1 - 2 = 3 - 2 = 1 = u_1$. Ainsi l'égalité est vérifiée pour les deux premiers cas.

   Supposons que pour un certain $n$, on ait $u_n = 3^n - 2$ et $u_{n+1} = 3^{n+1} - 2$, montrons que $u_{n+2} = 3^{n+2} - 2$. En effet,
$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n = 4 \times 3^{n+1} - 8 - 3 \times 3^n + 6 = 3 \times 3^{n+1} - 2 = 3^{n+2} - 2.$$
   D'où la conclusion par récurrence.
4. **Vrai.** Montrons par récurrence sur $n$ que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$.

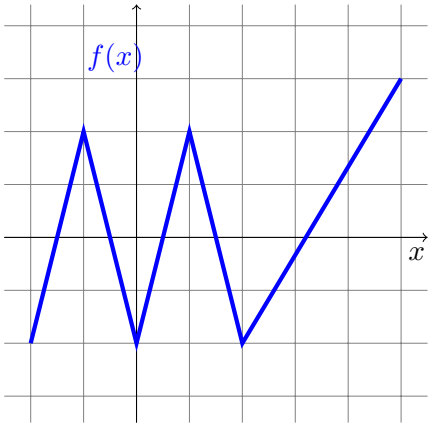
   Pour $n = 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = 0$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = 0$. L'égalité est donc claire.

   Supposons que pour un certain $n$ on ait $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$ et montrons l'égalité au rang $n+1$.

   D'une part,
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2 + (n+1)^3 \text{ par hypothèse de récurrence}\end{aligned}$$
   et d'autre part,
$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^{n+1} k\right)^2 &= \left(\sum_{k=0}^{n} k + (n+1)\right)^2 \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2 + 2\left(\sum_{k=0}^{n} k\right)(n+1) + (n+1)^2 \text{ identité remarquable} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2 + n(n+1)^2 + (n+1)^2 \text{ avec la formule } \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2 + (n+1)^3 \text{ en factorisant par } (n+1)^2\end{aligned}$$

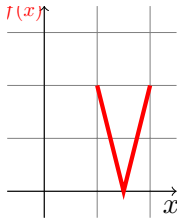
D'où la conclusion par récurrence.

5. **Faux.** Considérons la fonction $f : x \mapsto x^2$ définie sur l'intervalle $[-1, 2]$ alors d'une part le graphe de cette fonction est une parabole qui atteint son minimum en 0, elle n'est donc pas croissante (elle n'est même pas monotone). Pour autant $f(-1) = 1 < 4 = f(2)$.
6. **Faux.** La fonction $x \mapsto |x|$ définie sur $I = \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Pour autant, elle n'est pas dérivable en 0 car la dérivée à gauche en 0 (égale à $-1$) et la dérivée à droite en 0 (égale à 1) ne coincident pas.
7. **Faux.** Considérons la fonction $f : x \mapsto x^3$ définie sur $]-1, 1[$. Alors $f$ est dérivable de dérivée $x \mapsto 3x^2$. On constate alors que $f'(0) = 0$. Pour autant, $f$ est strictement croissante sur $]-1, 1[$, elle ne peut donc pas admettre un extremum en 0.
8. **Vrai.** Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors
$$f'(a) = \lim_{h\to 0,\ h\neq 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \text{ et } f'(-a) = \lim_{h\to 0,\ h\neq 0} \frac{f(-a+h)-f(-a)}{h}$$
par définition de la dérivée. Prenons maintenant $h \neq 0$ alors
$$\frac{f(-a+h)-f(-a)}{h} = \frac{-f(a-h)+f(a)}{h} = \frac{f(a-h)-f(a)}{-h}$$
où l'on a utilisé l'imparité de $f$ pour la première égalité. On remarque alors que
$$\lim_{h\to 0,\ h\neq 0} \frac{f(-a+h)-f(-a)}{h} = f'(-a)$$
par définition mais que l'on a aussi
$$\lim_{h\to 0,\ h\neq 0} \frac{f(-a+h)-f(-a)}{h} = \lim_{h\to 0,\ h\neq 0} \frac{f(a-h)-f(a)}{-h} = f'(a)$$
d'où $f'(-a) = f'(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et donc, par définition $f'$ est paire.
9. **Vrai.** Remarquons que si $M(x, y)$ est un point du plan alors son symétrique par rapport au point $A(2, 1)$ a pour coordonnées $(2-(x-2), 1-(y-1)) = (4-x, 2-y)$. Un point quelconque $M$ du graphe de $f$ s'écrit $(x, \frac{x+2}{x-2})$ avec $x \neq 2$. Le point $M$ a donc pour symétrique par rapport à $A$ le point de coordonnées $(4-x, \frac{2x-4-x-2}{x-2}) = (4-x, \frac{x-6}{x-2}) = (4-x, f(4-x))$ d'où la stabilité du graphe par symétrie par rapport à $A$.
10. **Faux.** Calculons le taux d'accroissement en 0. Soit $h > 0$, on a $\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{f(h)}{h} = \ln\left(\frac{h+5}{h}\right) = \ln\left(1+\frac{5}{h}\right)$ Ainsi
$$\lim_{h\to 0} \ln\left(1+\frac{5}{h}\right) = +\infty$$
et donc le taux d'accroissement n'admet pas de limite finie. La fonction n'est donc pas dérivable.
11. **Faux.** Considérons la fonction suivante en bleu :




Alors la fonction $f$ est continue (elle est même affine par morceaux avec des raccords continus entre les morceaux). De plus $f(-2) = -2$ et $f(5) = 3$. Pour autant il y a 5 solutions à l'équation $f(x) = 0$ et pas seulement une.

12. **Faux.** Considérons la fonction suivante en rouge :




Il est clair que $f$ est continue et de plus $\int_0^1 f(t)dt$ est égal à l'aire des deux triangles rectangles sous la courbe rouge, chacun de ces deux triangles rectangles sont d'aire $\frac{2\times\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2}$ et donc $\int_0^1 f(t)dt = 1$. Pour autant $f(\frac{3}{2}) = 0 < 1$.

13. **. Vrai**. Pour cette question, on identifie les vecteurs aux vecteurs de leurs coordonnées. Le plan $(P)$ a pour direction le plan vectoriel $F$ engendré par $\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\end{pmatrix}$. La droite $(D)$ a pour vecteur directeur $v = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix}$. La matrice formée par les trois vecteurs est : $\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

On calcule le déterminant d'une telle matrice :

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -6\end{vmatrix} = -6$$

on en déduit que $\mathbb{R}^3 = F \oplus \mathbb{R}v$. En particulier il y a un point d'intersection entre $(P)$ et $(D)$ et l'intersection des deux est un sous-espace affine de dimension $\dim F \cap \mathbb{R}v = 0$, c'est à dire un point. D'où existence et unicité du point d'intersection.

14. **Vrai.** On paramètre la droite $(D)$, il s'agit de l'ensemble des points de coordonnées

$$(t, -t-3),\ t \in \mathbb{R}.$$

Un tel point paramétré par $t \in \mathbb{R}$ est dans le cercle si et seulement si

$$t^2 + (t+3)^2 + 2(t+3) - 7 = 0$$

si et seulement si

$$2t^2 + 8t + 8 = 0$$

si et seulement si

$$(t+2)^2 = 0$$

Ainsi il y a un unique point d'intersection entre $(D)$ et $(C)$ (le point $(2, -5)$).

Il n'y a que 3 configurations possibles pour l'intersection de $(D)$ et $(C)$ : 0 point d'intersection, 1 point d'intersection et la droite est tangente au cercle, 2 points d'intersection. Nous sommes dans la seconde configuration, on en déduit que $(D)$ est tangente à $(C)$.

15. **Vrai.** L'affixe du vecteur $\overrightarrow{MN}$ est $z_1 = 5 + 4i - (1+3i) = 4 + i$ et l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MP}$ est $z_2 = 2 - i - (1+3i) = 1 - 4i$.

Calculons maintenant l'argument de :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4+i}{1-4i} = \frac{(4+i)(1+4i)}{1+16} = \frac{17i}{17} = e^{i\pi/2}.$$

On en déduit que $\overrightarrow{MN}$ est la rotation d'angle $\pi/2$ du vecteur $\overrightarrow{MN}$. En particulier $[M, N, P]$ est un triangle rectangle isocèle en $M$.

16. **Faux.** Considérons l'évènement complémentaire à $A$ que l'on notera $B$ : « la boite présente un défaut de dimension ». Alors on peut décomposer cet évènement en 2 évènements disjoints :
— « la boite présente les 2 défauts de dimension et d'aspect ».
— « la boite présente un défaut de dimension mais pas d'aspect ».

La probabilité de $B$ est donc la somme des probabilités de ces 2 évènements. Or le premier est de probabilité 3% par la troisième hypothèse et le second a une probabilité $> 0$ en vertu des deux premières. On en déduit que la probabilité de $B$ est $> 3\%$ et donc que $A$ a une probabilité $< 97\%$.

17. **Vrai.** Notons pour $n = 1, \ldots, 6$, $p_n$ la probabilité d'obtenir la face $n$. Par hypothèse, il existe $\lambda > 0$ tel que $p_n = \lambda n^2$. Puisque l'on veut une probabilité, on doit avoir :

$$p_1 + \cdots + p_6 = 1 \text{ et donc } \lambda = \frac{1}{1^2 + \cdots + 6^2} = \frac{1}{91} = \frac{1}{7 \times 13}.$$

Par définition,

$$E(X) = \sum_{k=1}^{6} k p_k = \frac{1}{7 \times 13} \sum_{k=1}^{6} k^3$$

En utilisant la question 4 et le fait que $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} = \frac{6(6+1)}{2} = 3 \times 7$, on en déduit que

$$E(X) = \frac{3^2 \times 7^2}{7 \times 13} = \frac{63}{13}.$$

18. **Faux.** En programmant l'algorithme sur la calculatrice programmable on constate que l'algorithme affiche 14 et pas 15.

**Problème 2 : nombres entiers, décimaux, rationnels, irrationnels**

## I- Nombres décimaux

1 - Si $n$ est un entier alors $n = \frac{n}{1}$ qui est une fraction décimale (car $1 = 10^0$). En particulier, $n$ est un nombre décimal (car il admet une écriture sous la forme d'une fraction décimale).

2 - Avec une calculatrice, on voit facilement que $65536 = 2^{16}$. Ainsi

$$\frac{1}{65536} = \frac{1}{2^{16}} = \frac{5^{16}}{2^{16}5^{16}} = \frac{5^{16}}{10^{16}}.$$

Nous avons donc construit une écriture pour $\frac{1}{65536}$ sous la forme d'une fraction décimale. C'est donc un nombre décimal.

3 - Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe une écriture de $\frac{1}{3}$ sous la forme d'une fraction décimale : $\frac{n}{10^a}$ alors

$$\frac{1}{3} = \frac{n}{10^a} \text{ et donc } 3n = 10^a.$$

Or 3 ne peut diviser $10^a$ (par exemple car la somme des chiffres de $10^a = 1\underbrace{0\ldots0}_{a \text{ zéros}}$ est égale à 1 qui n'est pas divisible par 3). Ceci est donc absurde et c'est donc que $\frac{1}{3}$ n'admet pas d'écriture sous forme de fraction décimale.

## II - Division euclidienne

1 - Puisque $b > 0$, la suite $(nb)$ tend vers $+\infty$ quand $n$ tend vers $+\infty$. En particulier, il existe un rang $N$ tel que pour tout $n \geq N$, $nb > a$. En particulier, il existe $n$ tel que $nb > a$.

2 - Considérons le plus petit élément $t$ de $S$. alors on a $ts > a$ et de plus, puisque $t$ est le plus petit élément de $S$, $t-1 \notin S$ de telle sorte $(t-1)s \leq a$. Notons $q = t-1$ alors

$$qb \leq a < (q+1)b$$

**Il semble y avoir une erreur dans l'énoncé puisqu'il n'y a aucune condition sur $r$. Je pars dorénavant du principe que l'on cherche $(q, r)$ tel que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$.**

Notons donc $r = a - bq$ avec $q$ défini comme plus haut. On a bien $a = bq + r$ et de plus $qb \leq a < (q+1)b$ implique $0 \leq a - bq < b$, c'est-à-dire $0 \leq r < b$.

3 - Supposons que $(q, r)$ et $(q,', r')$ soient deux couples solutions. On a alors $r - r' = a - bq + bq' - a = b(q - q')$ et de plus

$$-b < r - r' < b.$$

Ainsi, $r - r'$ est un multiple de $b$ compris dans $]-b, b[$. Or cet intervalle ne contient qu'un seul multiple de $b$, c'est 0. D'où $r - r' = 0$ et donc $r = r$ puis $b(q - q') = 0$ et donc $q = q'$ (puisque $b$ est non-nul).

4 - Notons $b$ le diviseur et $q$ le quotient. Nous avons par hypothèse $53 = bq + 5$ avec $0 \leq 5 < b$ ou encore $bq = 48$ avec $b > 5$. Ainsi les couples $(b, q)$ qui vont convenir sont ceux vérifiant $bq = 48$ avec $b > 5$ et puisque $q = \frac{48}{b}$, il suffit de faire la liste des diviseurs de 48 qui sont $> 5$.

On a $48 = 16 \times 3$. Les diviseurs de 48 strictement supérieurs à 5 sont donc :

$$6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 8 \text{ et } 16$$

et les couples $(b, q)$ solutions correspondants sont donc :

$$(6, 8),\ (12, 4),\ (24, 2),\ (48, 1),\ (8, 6) \text{ et } (16, 3).$$

5 - Notons $(q_a, r_a)$ (resp. $(q_b, r_b)$) les quotient et reste de la division euclidienne de $a$ (resp. $b$) par $a - b$.

On a $a = q_a(a-b) + r_a$ avec $0 \leq r_a < a - b$ et $b = q_b(a-b) + r_b$ avec $0 \leq r_b < a - b$. On a donc $a - b = (q_a - q_b)(a-b) + r_a - r_b$. Remarquons que $-(a-b) < r_a - r_b < (a-b)$. Or l'égalité ci-dessus justifie que $r_a - r_b$ est un multiple de $a - b$. Il n'y en a qu'un seul dans $]-(a-b), a-b[$ c'est 0. D'où $r_a = r_b$ et donc $a - b = (q_a - q_b)(a-b)$ et donc (puisque $a > b$) $1 = q_a - q_b$ ou encore $q_a = 1 + q_b$.

**III - Division euclidienne et nombres décimaux**

1 - (a) Nous avons $22 = 3 \times 7 + 1$ avec $0 \leq 1 < 7$ d'où $q_0 = 3$ et $r_0 = 1$.
Nous avons $220 = 30 \times 7 + 10 = 31 \times 7 + 3$ avec $0 \leq 3 < 7$ d'où $q_1 = 31$ et $r_1 = 3$.
Nous avons $2200 = 310 \times 7 + 30 = 314 \times 7 + 2$ avec $0 \leq 2 < 7$ d'où $q_2 = 314$ et $r_2 = 2$.
Nous avons $22000 = 3140 \times 7 + 20 = 3142 \times 7 + 6$ avec $0 \leq 6 < 7$ d'où $q_3 = 3142$ et $r_3 = 6$.

(b) On a en lisant la division posée en potence $r_2 + 4 \times 7 = 10r_1$ et l'on reconnait alors $r_2 = 10r_1 + (10q_1 - q_2)b$.

2 - Nous avons $a10^n = q_n b + r_n$ avec $0 \leq r_n < b$. On a donc

$$\frac{a}{b} = \frac{q_n}{10^n} + \frac{r_n}{10^n b}$$

d'où

$$0 \leq \frac{a}{b} - \frac{q_n}{10^n} < \frac{1}{10^n}$$

d'où

$$\frac{q_n}{10^n} \leq \frac{a}{b} < \frac{q_n + 1}{10^n}.$$

3 - Nous avons $a10^n = q_n b + r_n$ et $a10^{n-1} = q_{n-1} b + r_{n-1}$ par définition. Nous avons donc

$$q_n b + r_n = 10 \times a10^{n-1} = 10q_{n-1} b + 10r_{n-1}$$

d'où

$$r_n - 10r_{n-1} = (10q_{n-1} - q_n) \times b.$$

4 - On démontre cette équivalence par double-implication.

Supposons que $\frac{a}{b}$ est décimal alors il existe $n, k$ tels que $\frac{a}{b} = \frac{n}{10^k}$ ou encore $a10^k = bn$. Ainsi, on en déduit que $(q_k, r_k) = (n, 0)$ d'où l'existence d'un rang tel que $r_k = 0$.

Réciproquement, si $r_k = 0$ alors $a10^k = bq_k$ et donc $\frac{a}{b} = \frac{q_k}{10^k}$ qui est une fraction décimale. D'où $\frac{a}{b}$ est un nombre décimal.

5 - (a) On a $0 \leq r_{n-1} < b$ et donc $0 \leq 10r_{n-1} < 10b$. D'où $0 \leq Q(n)b + R(n) < 10b$ or $0 \leq R(n) < b$ donc $-b < Q(n)b < 10b$ et donc $-1 < Q(n) < 10$ en divisant par $b > 0$. Or $Q(n)$ est un entier naturel donc $0 \leq Q(n) \leq 9$.

(b) On a $10r_{n-1} = bQ(n) + R(n)$ de plus on a (question 3) : $10bq_{n-1} + 10r_{n-1} = bq_n + r_n$ ainsi $bq_n + r_n = 10bq_{n-1} + bQ(n) + R(n) = b(10q_{n-1} + Q(n)) + R(n)$. Or $0 \leq r_n, R(n) < b$ on a donc deux divisions euclidiennes différentes et l'on en déduit donc (par unicité : Question II 3) :

$$q_n = 10q_{n-1} + Q(n) \text{ et } r_n = R(n).$$

(c) En divisant l'équation $q_n = 10q_{n-1} + Q(n)$ par $10^n$, on obtient :

$$\frac{q_n}{10^n} - \frac{q_{n-1}}{10^{n-1}} = \frac{Q(n)}{10^n}$$

et donc avec (a), on en déduit que :

$$0 \leq \frac{q_n}{10^n} - \frac{q_{n-1}}{10^{n-1}} \leq \frac{9}{10^n} = \frac{1}{10^{n-1}} - \frac{1}{10^n}$$

on obtient donc

$$\frac{q_{n-1}}{10^{n-1}} \leq \frac{q_n}{10^n} \text{ et } \frac{q_n + 1}{10^n} \leq \frac{q_{n-1} + 1}{10^{n-1}}.$$

6 - Supposons que $r_{n+k} = r_n$ alors on a $10r_{n+k} = 10r_n$ et donc $bQ(n+k+1) + R(n+k+1) = bQ(n+1) + R(n+1)$ et donc en particulier (par unicité de la division euclidienne) $R(n+k+1) = R(n+1)$ et donc $r_{n+k} = r_n$ avec l'expression de $r_n$ obtenu en 5, (b).

7 - Dès qu'il y a une répétition de restes partiels, il y a une périodicité des restes par récurrence immédiate. On a $10r_{n-1} = bQ(n) + r_n$ et donc $Q(n) = \frac{10r_{n-1} - r_n}{b}$. On en déduit que $Q(n)$ est périodique également. Or $Q(n)$ désigne les décimales, donc les décimales sont périodiques.

**IV - Approximation de $\sqrt{2}$**

1 - La fonction $f$ est dérivable sur $[1,2]$ et pour tout $x \in [1,2]$, $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$. Ainsi $f'(x) \leq 0$ si et seulement si $x^2 \leq 2$ si et seulement si $x \leq \sqrt{2}$. Ainsi $f'$ est strictement négative sur $[1, \sqrt{2}[$ et strictement positive sur $]\sqrt{2}, 2]$. On en déduit que $f$ est strictement décroissante sur $[1, \sqrt{2}]$ puis strictement croissante sur $[\sqrt{2}, 2]$.

2 - On a $a_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{17}{12}$. On a $a_0 = \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2}$. De plus $a_0 = \frac{18}{12} > \frac{17}{12} = a_1$. Finalement $a_1 > \sqrt{2}$ avec la calculatrice.

Supposons maintenant que l'on ait $\sqrt{2} \leq a_{n+1} < a_n \leq \frac{3}{2}$ alors on a (puisque $f$ est strictement croissante sur $[\sqrt{2}, \frac{3}{2}]$),

$$\sqrt{2} = f(\sqrt{2}) \leq f(a_{n+1}) < f(a_n) \leq f(\frac{3}{2}) = a_1 \leq a_0 = \frac{3}{2}$$

D'où

$$\sqrt{2} \leq a_{n+2} < a_{n+1} \leq \frac{3}{2}$$

d'où la conclusion par récurrence.

3 - On a

$$a_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n} - 2\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}\left(a_n - \sqrt{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{a_n} - \sqrt{2}\right)$$

Or $\frac{2}{a_n} \leq \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ donc

$$a_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}\left(a_n - \sqrt{2}\right).$$

4 - Montrons par récurrence que pour tout $n$, $0 < a_n - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. Pour $n = 0$, $a_0 > \sqrt{2}$ (via la question 2) et $a_0 - \sqrt{2} - \frac{1}{2} = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} < 0$ d'où l'inégalité au rang 0.

Supposons maintenant que l'on ait $0 < a_n - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ pour un certain $n$. Puisque $f$ est injective sur $[\sqrt{2}, 2]$ et $a_n > \sqrt{2}$ on a $a_{n+1} = f(a_n) > f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$. De plus $a_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}\left(a_n - \sqrt{2}\right) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ d'où la conclusion par récurrence.

5 - Puisque la suite constante égale à 0 converge vers 0 et que la suite $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$ est géométrique de raison $q$ avec $|q| < 1$ et converge donc vers 0. L'encadrement de la question précédente combinée au théorème des gendarmes impose que

$$\lim_{n\to\infty} a_n - \sqrt{2} = 0$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}.$$

6 - Le programme ci-dessous :

```
a = 3/2
n = 0
while n + 1 < 10 ln(10)/ ln(2) :
    a = (a + 2/a)/2
    n = n + 1
print  a
```

## V - Irrationalité de $\sqrt{2}$

1 - On remarque que le chiffre des unités de $n^2$ ne dépend que du chiffre des unité de $n$. On fait un tableau

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n^2$ | 0 | 1 | 4 | 9 | 6 | 5 | 6 | 9 | 4 | 1 |
| $2n^2$ | 0 | 2 | 8 | 8 | 2 | 0 | 2 | 8 | 8 | 2 |

2 - On a $2q^2 = p^2$, ainsi le chiffre des unités de $p^2$ est nécessairement $0, 2, 8$ et donc le chiffre des unités de $p$ ne peut être que 0. Par conséquent, le chiffre des unités de $2q^2$ est 0 et donc le chiffre des unités de $q$ est 0 ou 5.

3 - Dire que le chiffre des unités de $p$ est 0 c'est dire que $p$ est divisible par 10 et donc par 5 en particulier. Et dire que le chiffre des unités de $q$ est 0 ou 5 impose que $q = 10\ell$ ou $10\ell + 5$. Dans les deux cas $q$ est divisible par 5. D'où 5 est un diviseur commun à $p$ et $q$ et la fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible

**VI - Approximation de** $\ln(2)$

1 - Les $n$ intervalles étant réguliers leur largeur est de $\frac{1}{n}$. La hauteur du $k$-ème rectangle est donnée par $f\left(1+\frac{k}{n}\right) = \frac{n}{n+k}$. D'où l'aire du $k$-ème rectangle est donnée par $\frac{1}{n}\frac{n}{n+k} = \frac{1}{n+k}$. Ainsi

$$S_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+n}.$$

2 - Puisque $f$ est décroissante, la réunion des aires des rectangles est contenue dans la zone délimitée par l'axe des abscisses et le graphe de $f$ sur l'intervalle $[1,2]$. On en déduit que

$$S_n \leq \int_1^2 f(x)dx = [\ln(x)]_1^2 = \ln(2).$$

Par suite $(S_n)$ est majorée.

D'autre part,

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2(n+1)} - \left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0.$$

Ainsi $(S_n)$ est croissante et majorée. Elle est donc convergente.

3 - Puisque $f$ est décroissante sur $[1,2]$ (avec le même argument qu'en 2), on a

$$\int_1^2 x dx \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f(1 + \frac{k-1}{n}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k-1} = S_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = S_n + \frac{1}{2n}$$

Ainsi, avec ce qui a été fait précédemment

$$S_n \leq \int_1^2 f(x)dx \leq S_n + \frac{1}{2n}.$$

4 - On en déduit que

$$\int_1^2 f(x)dx - \frac{1}{2n} \leq S_n \leq \int_1^2 f(x)dx$$

or $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0$ donc, par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \int_1^2 f(x)dx = \ln(2)$.

**Problème 3 : angles, relations métriques et variations de l'aire d'un triangle**

**I - Formules d'addition**

1 - Nous allons utiliser le fait que la sommes des angles d'un triangle fait $\pi$. Dans le triangle $[A, D, C]$, on a donc $b + \widehat{ADC} + \pi/2 = \pi$ d'où $\widehat{ADC} = \pi/2 - b$.

Dans le triangle $[A, D, E]$, on a $(a + b) + \pi/2 + \widehat{ADE} = \pi$ d'où $\widehat{ADE} = \pi/2 - (a + b)$. On a $\widehat{CDE} = \widehat{ADC} - \widehat{ADE} = \pi/2 - b - (\pi/2 - (a + b)) = a$. D'où la conclusion.

2 - En faisant de la trigonométrie dans le triangle rectangle $[A, E, D]$, on a

$$\sin(\widehat{DAE}) = \frac{\overline{DE}}{1}$$

d'où $\sin(a + b) = \overline{EF} + \overline{DF}$.

En faisant de la trigonométrie dans le triangle rectangle $[A, E, D]$, on a $\sin(b) = \frac{\overline{CD}}{1} = \overline{CD}$.

En faisant de la trigonométrie dans le triangle rectangle $[D, F, C]$, on a $\sin(\widehat{FDC}) = \frac{\overline{FD}}{\overline{CD}}$. Ainsi $\overline{FD} = \sin(a)\cos(b)$.

En faisant de la trigonométrie dans le triangle rectangle $[D, C, A]$, on a $\cos(b) = \frac{\overline{AD}}{1} = \overline{AD}$.

En faisant de la trigonométrie dans le triangle rectangle $[A, B, C]$, on a $\sin(a) = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$. D'où $\overline{EF} = \overline{CB} = \sin(a)\cos(b)$.

Par suite, $\sin(a + b) = \overline{EF} + \overline{DF} = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.

3 - On a

$$\tan(a + b) = \frac{\sin(a + b)}{\cos(a + b)} = \frac{\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)}$$

on divise numérateur et dénominateur par $\cos(a)\cos(b)$ et l'on obtient donc :

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}.$$

4 - On a alors $\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan(a)^2}$. Pour $a = \frac{\pi}{8}$ on a donc (en notant $t = \tan(\frac{\pi}{8})$) : $1 = \frac{2t}{1-t^2}$ d'où $t^2 + 2t - 1 = 0$ ou encore $(t + 1)^2 = 2$ ou encore $t = \pm\sqrt{2} - 1$ or $t > 0$ donc $t = \sqrt{2} - 1$.

**II - Relations métriques**

1 - L'aire du triangle $[A, B, C]$ est clairement donnée par la somme des aires des triangles $[A, I, B]$, $[B, I, C]$ et $[C, I, A]$. Le segment $[I, R]$ étant une hauteur, par construction, de $[A, I, B]$, l'aire du triangle $[A, I, B]$ est $\frac{\overline{IR}\times\overline{AB}}{2} = \frac{r\overline{AB}}{2}$. De même

$$Aire([B, I, C]) = \frac{r\overline{BC}}{2} \text{ et } Aire([C, I, A]) = \frac{r\overline{AC}}{2}$$

donc

$$Aire([A, B, C]) = \frac{r(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA})}{2} = \frac{2pr}{2} = pr.$$

2 - On fait de la trigonométrie dans le triangle $[A, I, R]$ : $\tan(a) = \frac{r}{\overline{AR}}$ et donc $\frac{r}{\tan(a)} = \overline{AR}$. Puisque $(AI)$ est la bissectrice de $[A, B, C]$ issue de $A$, on en déduit que $\widehat{IAQ} = a$ et donc $\frac{r}{\tan(a)} = \overline{AQ}$. En particulier $2\frac{r}{\tan(a)} = \overline{AR} + \overline{AQ}$.

De même $2\frac{r}{\tan(b)} = \overline{BR} + \overline{BP}$ et $2\frac{r}{\tan(c)} = \overline{CQ} + \overline{CP}$. Ainsi

$$2r\left(\frac{1}{\tan(a)} + \frac{1}{\tan(b)} + \frac{1}{\tan(c)}\right) = \overline{AR} + \overline{AQ} + \overline{BR} + \overline{BP} + \overline{CQ} + \overline{CP} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 2p$$

d'où

$$p = r\left(\frac{1}{\tan(a)} + \frac{1}{\tan(b)} + \frac{1}{\tan(c)}\right).$$

3 - (a) On a $\widehat{ACB} = 2c$, $\widehat{ABC} = 2b$ et $\widehat{ACB} + \widehat{ABC} + \pi/2 = \pi$ on en déduit que $2c = \pi/2 - 2b$ et donc $c = \pi/4 - b$.

Par suite (avec la formule du I, 3) :

$$\tan(c) = \frac{\tan(\pi/4) - \tan(b)}{1 + \tan(\pi/4)\tan(b)} = \frac{1 - \tan(b)}{1 + \tan(b)}.$$

(b) On a $\tan(a) = 1$. Ainsi avec les questions 2 et 3 (a) :

$$p = r\left(1 + \frac{1}{\tan(b)} + \frac{1 + \tan(b)}{1 - \tan(b)}\right) = r\frac{\tan(b) - \tan^2(b) + 1 - \tan(b) + \tan(b) + \tan^2(b)}{\tan(b)(1 - \tan(b))} = \frac{1 + \tan(b)}{\tan(b)(1 - \tan(b))}.$$

D'où

$$r = p\frac{\tan(b)(1 - \tan(b))}{1 + \tan(b)}.$$

**III - Variations du rayon et de l'aire du triangle rectangle**

1 - Dérivons la fonction $f$ (qui est bien dérivable sur $]0, 1[$), on a pour tout $x \in ]0, 1[$ :

$$f'(x) = p\frac{(1 - 2x)(1 + x) - x(1 - x)}{(1 + x)^2} = p\frac{1 - 2x - x^2}{(1 + x)^2}$$

Ainsi le signe de $f'$ est donné par le signe de la fonction polynomiale de degré 2 $x \mapsto 1 - 2x - x^2 = -(x+1)^2 + 2$. Les racines de ce polynôme sont $x_\pm = -1 \pm \sqrt{2}$. On remarque alors que $x_+ = \sqrt{2} - 1$ est contenu dans $]0, 1[$. On en déduit que $f$ est croissante sur $]0, x_+[$ puis décroissante sur $]x_+, 1[$.

2 - Puisque tan est une bijection continue croissante sur $]\check{}\pi/2, \pi/2[$, on en déduit que $g$ est croissante sur l'intervalle $]\tan^{-1}(0), \tan^{-1}(\sqrt{2} - 1)[$ et décroissante sur $]\tan^{-1}(\sqrt{2} - 1), \tan^{-1}(1)[$ d'où $g$ est croissante sur $]0, \pi/8[$ puis décroissante sur $]\pi/8, \pi/4[$.

3 - D'après la question II, 3, (b), on a $r = g(b)$. Ainsi, il suffit de maximiser $g$ sur $]0, \pi/4[$. D'après les variations de $g$ obtenues en 2, $g$ est maximal en $\pi/8$ ainsi la valeur maximale est donnée par

$$r = g(\pi/8) = p\frac{(\sqrt{2} - 1)(2 - \sqrt{2})}{\sqrt{2}} = p\frac{3\sqrt{2} - 2 - 2}{\sqrt{2}} = p\frac{3\sqrt{2} - 4}{\sqrt{2}} = p(3 - 2\sqrt{2}).$$

4 - On a $S(b) = pr$ (question II 1) et d'après II 3 (b), $r = p\frac{\tan(b)(1-\tan(b))}{1+\tan(b)}$ donc

$$S(b) = p^2\frac{\tan(b)(1 - \tan(b))}{1 + \tan(b)}.$$

5 - L'aire du triangle rectangle $S(b) = pg(b)$ elle est donc maximale en $b = \pi/8$ ce qui donne donc

$$S(b) = p^2(3 - 2\sqrt{2}).$$